WURZELFUNKTIONEN

Trainingsheft

Sammlung von Übungsaufgaben

Teilweise Abiturniveau

Die Lösungen befinden sich in mehreren Folgedateien.

Datei Nr. 44100

Stand: 24. Mai 2009

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Übersicht über die Funktionsarten
In dieser Sammlung

Typ 1: Umkehrfunktionen von ganzrationalen Funktionen 2. Grades (Parabelfunktionen) und Potenzfunktionen
Sowie Wurzelfunktionen zu Halbparabeln.
Lösungen in Datei 44110

Die Lösungen des Typs 1 verwenden nur teilweise Ableitungen und können daher in Klasse 10 eingesetzt werden!

Typ 2/3: Aufgaben mit linearem und quadratischem Argument.
Jetzt mit Ableitungen
Lösungen in Datei 44120

Typ 4/5: Funktionen mit Bruchterm und zusammengesetzte Wurzelfunktionen
Lösungen in Datei 44130

Aufgaben vom Typ 1a: Parabelfunktionen mit Umkehrfunktionen

Aufgabe 101

Bestimme die Umkehrfunktionen zur Funktion

$$\boxed{f(x) = 4 - x^2}$$

durch Aufspaltung des Definitionsbereiches **D** = **R**.

Aufgabe 105

Gegeben ist die quadratische Funktion f.
Das Schaubild von f sei K.

a) Berechne die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen sowie den Scheitel S der Parabel.

Zeichne K in ein Achsenkreuz mit Längeneinheit 1 cm.

b) Begründe, warum f keine Umkehrfunktion hat.
Berechne die Umkehrfunktionen g_1 und g_2 zu Teilfunktionen von f.
Zeichne auch deren Schaubilder ein.

Löse diese Aufgabe für

(1) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

(2) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

(3) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$

(4) $y = f(x) = 2x^2 + 8x + 6$

(5) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{25}{16}$

(6) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

Aufgaben vom Typ 1b:
Halbparabel-Wurzelfunktionen ohne Ableitungen

Aufgabe 121

Gegeben ist die Funktion f.

a) Bestimme den Definitionsbereich D_f, die Wertmenge W_f, Nullstellen und Extrempunkte.
Zeichne das Schaubild.

b) Berechne die Gleichung der Umkehrfunktion g mit D_g und W_g.
Zeichne das Schaubild von g.

Löse diese Aufgabe für die folgenden Funktionen

(1) $y = f(x) = 2 - \sqrt{24 - 4x}$

(2) $y = f(x) = -2 + 2\sqrt{x + 3}$

(3) $y = f(x) = 5 - 2\sqrt{4 - x}$

(4) $y = f(x) = 1 + \sqrt{2x + 8}$

(5) $y = f(x) = -4 + 4\sqrt{x + 6}$

(6) $y = f(x) = 3 - \sqrt{5 - x}$

(7) $y = f(x) = 4 - \sqrt{2x + 10}$

Aufgaben vom Typ 1c:
Halbparabel-Wurzelfunktionen mit Ableitungen

Aufgabe 131

Bestimme zu jeder der folgenden Funktionen Definitionsmenge, Wertmenge Scheitel der Halbparabel und deren Lage (wohin geöffnet sowie untere oder obere Halbparabel). Berechne dann die Nullstellen sowie zwei Ableitungen.

(1) $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

(2) $f(x) = -2 - \sqrt{3-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{4-2x}$

(4) $f(x) = -3 + \sqrt{x+1}$

(5) $f(x) = 2 - \sqrt{x+2}$

(6) $f(x) = -1 - \sqrt{x}$

(7) $f(x) = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{x-4}$

(8) $f(x) = 6 - \sqrt{2x-5}$

(9) $f(x) = -\sqrt{-x}$

(10) $f(x) = 1 + \sqrt{-x-3}$

(11) $f(x) = \sqrt{8-x}$

(12) $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x+1}$

Aufgaben vom Typ 1d: Potenzfunktionen

Aufgabe 141

Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = \frac{1}{32}x^{\frac{5}{2}}$

K sei das Schaubild von f.

a) Zeichne K in ein Achsenkreuz (beide Achsen von 0 bis 10, LE 1 cm).

b) Bestimme Definitions- und Wertmenge von f.

c) Besitzt f eine Umkehrfunktion g ? Wenn ja, berechne deren Gleichung und Trage deren Schaubild in das Achsenkreuz ein.

d) Berechne die fehlenden Koordinaten der Punkte A und B auf K ohne Taschenrechner: A (4 I y_A), B (x_B I 243)

Aufgabe 142

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{64}x^3$.

Zeige, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Bestimme ihre Gleichung.

Aufgaben vom Typ 1d: Halbkreisfunktionen

Aufgabe 161

Bestimme Form und Lage des Schaubilds von f sowie Definitionsbereich, Nullstellen, Extrempunkte und Wertmenge.

(1) $y = f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 15}$

(2) $y = f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x + 10}$

(3) $y = f(x) = 2 - \sqrt{-x^2 - 4x}$

(4) $y = f(x) = -2 + \sqrt{-x^2 + 8x + 48}$

(5) $y = f(x) = 12 + \sqrt{-x^2 - 10x - 30}$

(6) $y = f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-4x^2 + 28x + 15}$

(7) $y = f(x) = 4 - \sqrt{-x^2 - 6x + 40}$

(8) $y = f(x) = 1 - \sqrt{-x^2 - 3x + \frac{11}{4}}$

(9) $y = f(x) = 4 - \sqrt{28 - 4x - x^2}$

Aufgabe 165

Warum stellt das Schaubild von $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 + 4}$ keinen Halbkreis dar?

Aufgabe 171

Gegeben ist K durch seine Gleichung.

Welche Kurve wird durch diese Gleichung dargestellt?

Erzeuge daraus zwei Wurzelfunktionen.

Gib ihre Definitionsbereiche und Wertmengen an sowie die Extrempunkte ihrer Schaubilder.

Fertige eine Zeichnung in einem geeigneten Koordinatensystem an.

Löse diese Aufgabe für diese Kurven:

(1) $x^2 + y^2 = 36$

(2) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

(3) $M(-5\,|\,5)$ mit r = 10

(4) $M(7\,|\,-13)$ mit r = 16

(5) $M(0\,|\,-12)$ mit r = 8

(6) $M\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{11}{2}\right)$ mit $r = \frac{7}{2}$

Aufgabe 181

Gegeben ist die Funktion f_t durch

$$\boxed{y = f(x) = 4 - \sqrt{-x^2 + 4x + t}}$$

für $t \in R$.

a) Ermittle die Lage und Form des Schaubildes von f_{21}.

b) Bestimme die Eigenschaften von f_{21}:
Definitionsbereich, Wertmenge, Extrempunkte, Nullstellen.
Zeichne das Schaubild.

c) Mache eine Aussage über die Kurve in Abhängigkeit von t.
Bestimme die Anzahl der Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 182

Gegeben ist die Funktion f_t für $t \in R$ durch

$$\boxed{y = f_t(x) = -2t + \sqrt{3t^2 + 2t - x^2}}$$

a) Ermittle Form und Lage des Schaubilds der Funktionen f_t.

b) Bestimme die Ortskurve der Mittelpunkte.

c) Welche Kurven K_t berühren die x-Achse?

Aufgaben vom Typ 2a
Radikand mit linearem Argument

Aufgabe 201 (Abitur WB 1972)

Für $t \in R^{+}$ sei f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{8}{t}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{t}}\right)$$

Das Schaubild der Funktion sei K_t.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f_t.
Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Bestimme alle Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_2 und K_4 mit Längeneinheit 2 cm.

b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Punkt P(u I v) der Kurve K_t mit $v > 0$ begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
Bestimme dessen Flächeninhalt $A_t(u)$.

Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt dieses Rechtecks am größten?

Für welchen Wert von t ist dieses größte Rechteck ein Quadrat?

c) Für jeden Wert von t begrenzt das Schaubild K_t von f_t mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück. Zeige, dass der Inhalt dieses Flächenstücks von t unabhängig ist.

d) Stelle die Gleichung der Tangente an K_t im Schnittpunkt mit der x-Achse auf.
Zeige, dass der Schnittpunkt zweier solcher Tangenten für t_1 und t_2 von t abhängig ist.
Zeige, dass für jedes t diese Tangente die Kurve C: $y = \frac{1}{x}$ berührt.

Aufgabe 211

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x - 4\sqrt{x}$.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte für das Schaubild K von f. Zeichne das Schaubild für $0 \le x \le 8$.

b) $P(u \mid v)$ sei ein Punkt von K mit $0 < u < 4$. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q. Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt A(u). Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er ?

c) Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V(u). Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an?

d) Berechne den Inhalt F der Fläche, die K und die x-Achse begrenzen.

e) Dreht man diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V*.

Aufgabe 221

Gegeben ist die Funktionenschar f_a für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f_a(x) = x - \sqrt{x + a}$$

a) Berechne den Definitionsbereich.

Für welche Werte von a kann es Nullstellen geben? Berechne sie für a = 2.

b) Berechne alle Extrem- und Wendepunkte.

Welche Gleichung hat die Ortskurve der Extrempunkte?

Wo gibt es senkrechte Tangenten?

c) Zeichne K_2. Gib dazu alle bekannten Daten zu K_2 an.

d) In welchem Punkt hat K_2 eine Tangente, die zur Geraden g: $y = \frac{1}{2}x$ parallel ist?

Gib die Gleichung dieser Tangente an.

Aufgabe 231

Bestimme den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechne zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt. Skizziere das Schaubild.

(1) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5-x}$

(3) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x-3}$

Aufgabe 241

Bestimme den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechne zwei Ableitungen (bei Nr. 3, 4, 16 und 18 nur eine) und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt. Skizziere das Schaubild.

(1) $f(x) = x\sqrt{x} - x$

(2) $f(x) = (x-4)\sqrt{x}$

(3) $f(x) = x\sqrt{x-3}$

Aufgabe 242 Lösung teilw. mit CAS

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{6-x}$.

a) Berechne Definitionsbereich, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte von K sowie die Wertmenge von f. Zeichne das Schaubild für $-2 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Berechne den Inhalt der Fläche, die deren Schaubild K mit der x-Achse einschließt.

c) Welchen Rauminhalt erhält der Rotationskörper, der bei Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht ?

d) $P(u|f(u))$ mit $0 < u < 6$ ist ein Kurvenpunkt von K. Fällt man das Lot von P auf die x-Achse, entsteht der Lotfußpunkt Q.
Berechne den Inhalt des Dreiecks OPQ.
Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen Extremwert an ?
(Auf die Untersuchung Minimum – Maximum kann verzichtet werden).

Aufgabe 243

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{x}{2}\sqrt{x+6}$.

K sei das Schaubild von f.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f.
Berechne Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte.
Wo hat K eine senkrechte Tangente ?

Zeichne K für $-6 \le x \le 2$.

b) $P(u\,|\,v)$ sei ein Punkt von K mit u < 0. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q.

Das Dreieck OPQ hat den Flächeninhalt A(u). Für welches u nimmt die Flächeninhaltsfunktion einen Extremwert an und wie groß ist er ?
(Nachweis des Maximums ohne 2. Ableitung !)

c) Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen V(u). Für welches u nimmt dieses Volumen einen Extremwert an und wie groß ist er ?

d) Berechne den Inhalt der Fläche, die deren Schaubild K mit der x-Achse einschließt.

e) Welchen Rauminhalt erhält der Rotationskörper, der bei Drehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht ?

Aufgabe 244 (BW Abitur 1990)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich **D**.
Untersuche K auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse sowie auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K im Bereich $-1 \leq x \leq 9$ mit Längeneinheit 1 cm.
Die Kurve K und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein.
Bei Drehung dieses Flächenstücks entsteht ein Rotationskörper.
Berechne dessen Volumen V.

b) Die x-Achse, die Gerade x = 9 und die Tangente an K im Ursprung bilden ein Dreieck. Zeige, dass dieses gleichschenklig ist.
Die Kurve K verläuft innerhalb dieses Dreiecks und zerlegt diese in zwei Teilflächen. Bestimmen Sie das Verhältnis dieser Teilflächen.

c) Die Normale N zu K im Punkt $P(u \mid f(u))$ mit $u < 9$ schneidet die x-Achse in einem Punkt S.

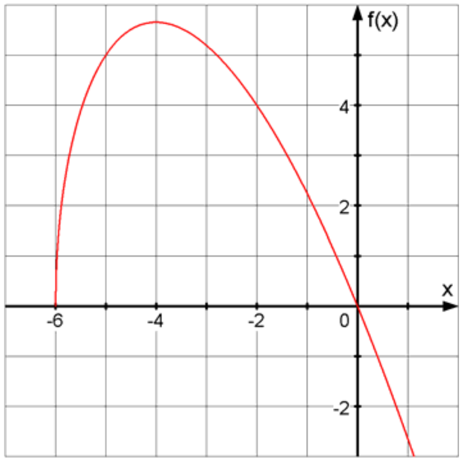
Bestimmen Sie dessen x-Koordinate x_S in Abhängigkeit von u sowie $\lim\limits_{u \to 9} x_s$.

d) Zeige, dass der Rotationskörper aus (a) aus einer Holzkugel mit dem Durchmesser 9 durch Abschleifen hergestellt werden kann.

Aufgabe 251

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f_t(x) = -x\sqrt{x+t} \quad \text{mit } t > 0.$$



a) Welches Schaubild K_t ist rechts dargestellt, wenn die Längeneinheit 1 cm beträgt? Begründe dies über den Definitionsbereich.

Die Normale zu K_6 im Punkt $P(u\,|\,v)$ mit $-6 < u < 0$ und $u \neq -4$ schneidet die x-Achse in Q.

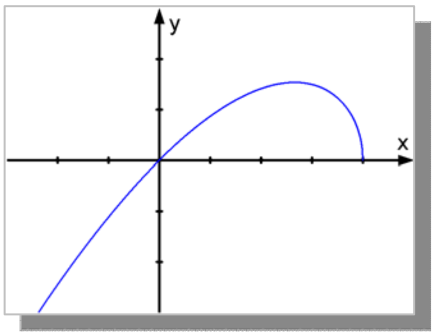
Berechne dessen x-Koordinate x_Q sowie die Grenzlage von Q für $u \to -6$.

b) Die Tangenten an K_t im Ursprung und im linken Randpunkt begrenzen mit der x-Achse eine Fläche. In welchem Verhältnis teilt K_t die Dreiecksfläche?

Aufgabe 252

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f_t(x) = \frac{x}{t}\sqrt{t^2 - x} \quad \text{mit } t > 0$$



a) Welches Schaubild K_t ist rechts dargestellt, wenn die Längeneinheit 1 cm beträgt? Begründe dies über den Definitionsbereich.

Die Normale zu K_2 im Punkt $P(u\,|\,v)$ mit $0 < u < 4$ und $u \neq \frac{8}{3}$ schneidet die x-Achse in Q. Berechne dessen x-Koordinate x_Q sowie die Grenzlage von Q für $u \to 4$.

b) Die Tangenten an K_t im Ursprung und im rechten Randpunkt begrenzen mit der x-Achse eine Fläche. In welchem Verhältnis teilt K_t die Dreiecksfläche?

Aufgabe 253

Gegeben ist die Funktion f_k durch $f_k(x) = x\sqrt{k-2x}$ für $k > 0$.
C_k sei das Schaubild von f_k .

a) Bestimme den Definitionsbereich von f_k .
Berechne 2 Ableitungen und bestimme damit Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne K_8 in ein geeignetes Achsenkreuz.

b) Berechne die Gleichung der **Ortskurve der Hochpunkte** und zeichne diese ein.

c) **Welche Scharkurve** geht durch den Punkt R (3 I 4)?
Welche Scharkurven gehen durch einen gegebenen Punkt Q (x I y)?

d) An welcher Stelle hat die Kurve K_8 eine zur Geraden $y = \frac{1}{2}x + 1$ **parallele Tangente**?

Extremwertaufgaben:

e) P(u I v) sei ein Punkt der Kurve K_8 mit $u > 0$. Das Lot von P auf die x-Achse sei Q. Berechne den Inhalt des Dreiecks OPQ.
Für welchen Wert von u nimmt dieser Inhalt einen extremen Inhalt an ?
Wie groß und von welcher Art ist er?

f) Dreht man dieses Dreieck OPQ um die x-Achse, entsteht ein Kegel.
Für welches u nimmt das Volumen dieses Körpers einen Extremwert an?
Wie groß und von welcher Art ist er?

g) Dreht man das Dreieck OPQ um die y-Achse entsteht ein Körper mit einer kegelförmigen Mulde. Berechne das Volumen des Körpers und das Fassungsvermögen dieser Mulde.
Für welches u nehmen Köpervolumen und Fassungsvermögen einen Extremwert an? Wie groß und von welcher Art ist er?

Integrationsaufgaben:

h) Berechne den Inhalt A(k) der Fläche, die von der Kurve C_k und der positiven x-Achse begrenzt wird.

Aufgabe 254

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = 3x\left(1 - t\sqrt{x}\right) \quad \text{für} \quad x \geq 0.$$

C_t sei das Schaubild von f_t .

a) Bestimme die gemeinsamen Punkte von C_t mit der x-Achse.
Gib die Tangentensteigungen in diesen Punkten an.
Untersuche C_t auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichne $C_{0,5}$ im Bereich $0 \leq x \leq 5$ mit Längeneinheit 2 cm.

b) Es sei Q der Punkt auf C_t mit der Abszisse $\frac{1}{t^2}$. Auf der Kurvennormalen von C_t in Q wird ein Punkt $P(u\,|\,v)$ mit $0 < u < \frac{1}{t^2}$ gewählt.
Die Gerade durch O und P, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch P begrenzen ein Dreieck.
Bestimme P so, daß dieses Dreieck einen extremalen Inhalt hat.
Was für ein Extremum liegt vor ?
Wie groß ist dieser extremale Flächeninhalt

c) Es sei $0 < t < 3$.
Die Gerade g mit der Gleichung $y = tx$ und C_t begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A_1 . Die Gerade g, C_t und die Parallele zur y-Achse durch Q aus Teilaufgabe b) begrenzen eine zweite Fläche mit dem Inhalt A_2 .
Bestimme t so, daß $A_1 = A_2$ ist.

d) Die gegebene Funktion f_t sei eine Stammfunktion einer Funktion g_t für $x > 0$.
Für welche $a > 0$ gilt $\int_a^x g_{\frac{1}{2}}(z)\,dz < f_{\frac{1}{2}}(x)$?
Bestimme mit Hilfe der Wertemenge von $f_{\frac{1}{2}}$ diejenigen Werte von c, für die die Gleichung

$$\int_a^x g_{\frac{1}{2}}(z)\,dz = f_{\frac{1}{2}}(x) - c \ ; \quad c \in \mathbb{R}$$

für kein $a > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 295

$$f(x) = \sqrt[3]{2-x}$$

Aufgaben vom Typ 3

Radikand mit quadratischem Argument
mit Ableitungen.

Siehe dazu auch Aufgabe 161!

Aufgabe 301

Bestimme den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechne zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt. Skizziere das Schaubild.

(1) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

(2) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 21}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

Aufgabe 311

Bestimme den Definitionsbereich, die Nullstellen und eventuell vorhandene Asymptoten. Berechne zwei Ableitungen und stelle fest, ob eine senkrechte Tangente vorliegt. Skizziere das Schaubild.

$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$$

Zusatz: Die Kurve K und die x-Achse begrenzen eine Fläche im 1. Feld. Berechne deren Inhalt (Integralrechnung).

Aufgabe 312

Gegeben ist die Funktion f für $x \geq 0$ durch

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}}$$

K sei das Schaubild von f.

a) Geben den maximalen Definitionsbereich D von f an.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K mit der x-Achse.
Untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Verhalten von K in diesen Punkten.

Untersuchen Sie K auf Symmetrie, Extrem und Wendepunkte.

Zeichnen Sie K für $x \in \mathbf{D}$ (Längeneinheit 2 cm!).

b) Die Fläche zwischen der positiven x-Achse und K rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie den Rauminhalt des entstehenden Drehkörpers.

Der Drehkörper soll aus einem möglichst kleinen Zylinder mit gleicher Achse hergestellt werden. Wieviel Prozent Abfall entsteht dabei ?

Der Drehkörper wird durch einen ebenen Schnitt, der die Drehachse enthält, zerlegt. Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche.

c) Die Normale in einem Kurvenpunkt mit der Abszisse u $(|u| \neq 2)$ schneidet die x-Achse am der Stelle $s(u)$.

Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Funktion $u \to s(u)$.

Durch welche Punkte der x-Achse geht genau eine dieser Normalen?

d) **<u>Allgemeiner Aufgabenteil !</u>**

Es sei g eine in $\mathbf{R}$ stetig differenzierbare Funktion. Für jedes a aus einem Intervall $[a;b]$ gelte $g(x) > 0$ und $g'(x) > 0$.

Die Funktion h ist gegeben durch $h: x \to g'(x) \cdot \sqrt{g(x)}$, $x \in [a;b]$.

Das Schaubild von h schließt mit der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $a = b$ eine Fläche mit dem Inhalt 1 ein.

Bestimmen Sie $g(a)$ und $g(b)$, wenn $g(b) = \sqrt[3]{4} \cdot g(a)$ ist.

Aufgabe 321

Für $t \in R^+$ sei f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x\sqrt{t - x^2}$$

Das Schaubild der Funktion sei K_t .

a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f_t .
Untersuche das Symmetrieverhalten von f_t .
Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
Berechne zwei Ableitungen.
Untersuche das **Monotonieverhalten** der Funktion.
Bestimme alle Extrem- und Wendepunkte.
Wo hat das Schaubild senkrechte Tangenten ?
Zeichne K_6 mit Längeneinheit 2 cm.

Hinweis: Bei dieser Wurzelfunktion gibt es außer den Extrempunkten mit waagerechter Tangente auch noch zwei Randextrempunkte. Aus der Zeichnung kann man schnell erkennen, ob Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.
Die mathematische Begründung dazu muß allerdings über die Monotonie erfolgen.

b) Stelle die Gleichung der Tangente im Ursprung an K_t auf.
g_m sei die Ursprungsgerade mit der Gleichung: $y = mx$.
Bestimme die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g_m und K_t in Abhängigkeit von m.

Für welchen Wert von m schneidet g_m die Kurve K_t im 1. Feld orthogonal ?
Berechne für diesen Fall den Schnittpunktes S in Abhängigkeit von t.
Bestimme die Gleichung der Ortskurve dieser Punkte S.

Hinweis: Man achte natürlich wie immer auf den Aufbau dieses Aufgabenteils. Da zuerst diese Tangente verlangt wird, hat der folgende Teil sicher etwas damit zu tun. Man kann also die Anzahl der Schnittpunkte durch eine einfache Überlegung bestimmen und braucht keine Schnittpunktberechnung!
Und zur Erinnerung: Zwei Geraden sind orthogonal, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt !

c) Berechne die Fläche, die von der Kurve K_t und der x-Achse im 1. Feld eingeschlossen wird.
Wie groß ist das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man diese Fläche um die x-Achse dreht.

Aufgabe 322

Gegeben ist die Funktion f_t für $t > 0$ durch

$$f_t(x) = \frac{x^2}{t} \cdot \sqrt{4t^2 - x^2}$$

Ihr Schaubild sei K_t .

a) Ermittle den maximalen Definitionsbereich von f_t , die gemeinsamen Punkte mit der x-Achse sowie die Punkte mit waagerechter und senkrechter Tangente von K_t . (Die Kontrolle mit der zweiten Ableitung darf unterbleiben)

Zeichne K_4 mit Längeneinheit 2 cm.

b) K_t schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Dreht man diese um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper . Berechne dessen Volumen V(t).

Es sei $t_1 \neq t_2$. Welche Beziehung gilt zwischen t_1 und t_2, wenn $V(t_2)$ 8 mal so groß werden soll wie $V(t_1)$?

c) Die beiden Hochpunkte und der Ursprung bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Gibt es einen Wert von t, so daß dieses Dreieck gleichseitig wird ?

Aufgabe 323

Gegeben ist die Funktion f_t für $t > 0$ durch

$$f_t(x) = \frac{x^2}{t} \cdot \sqrt{t^2 - x^2}$$

Ihr Schaubild sei K_t .

a) Ermittle den maximalen Definitionsbereich von f_t , die gemeinsamen Punkte mit der x-Achse sowie die Punkte mit waagerechter und senkrechter Tangente von K_t . (Die Kontrolle mit der zweiten Ableitung darf unterbleiben)

Zeichne K_4 mit Längeneinheit 1 cm.

b) K_t schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Dreht man diese um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper . Berechne dessen Volumen V(t).

Es sei $t_1 \neq t_2$. Welche Beziehung gilt zwischen t_1 und t_2, wenn $V(t_2)$ 8 mal so groß werden soll wie $V(t_1)$?

c) Die beiden Hochpunkte und der Ursprung bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Gibt es einen Wert von t, so daß dieses Dreieck gleichseitig wird ?

Aufgabe 351 auch mit zusätzlicher CAS-Lösung!

Sehr interessante Aufgabe

Gegeben ist die algebraische Kurve K durch $y^2 + 4x \cdot y - 4 = 0$.

a) Zeige, dass sie aus den beiden Ästen mit den Gleichungen
G_1: $f_1(x) = y = -2x + 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$ und G_2: $f_2(x) = y = -2x - 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$ besteht.

Zeichne die Kurve im Bereich $-6 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Weise durch eine geeignete Abbildung der Kurve nach, dass K punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

c) Zeige, dass die x-Achse und die Gerade y = - 4x Asymptoten der Kurve ist.
Es genügt der Nachweis mit f_1.

d) Die Winkelhalbierenden dieser beiden Asymptoten sind Symmetrieachsen von K:
Berechne die Gleichung dieser Winkelhalbierenden w_1 und w_2.

e) Jede Tangente in einem Punkt P von G_1 schneidet die beiden Asymptoten je einmal, etwa in A und B. Diese Strecke wird von P halbiert.

Beweise diese Eigenschaft rechnerisch für den Berührpunkt $P(2 \mid f_1(2))$.

f) Die Funktion $F(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + x \cdot \sqrt{x^2+1} - x^2$ ist eine Stammfunktion von
$f_1(x) = y = -2x + 2 \cdot \sqrt{x^2+1}$.

Berechne damit den Flächeninhalt zwischen der Kurve G_1, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 2\sqrt{2}$.

Aufgabe 352 Sehr interessante Aufgabe

Gegeben ist die algebraische Kurve K durch $y^2 + 2x \cdot y + 2 = 0$.

a) Stelle die Gleichungen zweier Funktionen auf, deren Schaubilder zusammen K ergeben.
(Ergbenis: $f_1(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2}$ und $f_2(x) = -x - \sqrt{x^2 - 2}$).

b) Berechne ihren Definitionsbereich, die Nullstellen.
Welche Extrempunkte besitzt f_1? (Nachweis erforderlich).

Beweise, dass K die beiden Asymptoten $y = 0$ und $y = -2x$ besitzt.
Zeigte, dass K punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Zeichne die Kurve im Bereich $-6 \le x \le 6$ mit Längeneinheit 1 cm.

c) Die Winkelhalbierenden dieser beiden Asymptoten sind Symmetrieachsen von K:
Berechne die Gleichung dieser Winkelhalbierenden w_1 und w_2.

Um welchen Winkel müsste man K um den Ursprung drehen, damit diese Winkelhalbierenden auf die Koordinatenachsen fallen?

Aufgaben vom Typ 4

Funktionen mit Bruchterm

Aufgabe 411

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2}{x}$$

Bestimme den Definitionsbereich der Funktion f, und ihre Nullstellen.

Welche Extrempunkte und welche Wendestelle hat ihr Schaubild K?

Bestimme auch die Asymptoten.

Zeichne K für $0 < x < 16$.

Aufgabe 412

Gegeben ist die Funktionenschar f_t für alle $t \in \mathbb{R}^+$ durch

$$f_t(x) = 10t\frac{t^2 - \sqrt{x}}{x}$$

K_t sei das Schaubild von f_t.

a) Berechne Definitionsbereich und Nullstellen.

Berechne alle Extrem- und Wendepunkte von K_t.

Bestimme die Asymptoten.

Zeichne K_1. Gib dazu alle bekannten Daten von K_1 an.

b) Es sei $P(u \mid v)$ ein Punkt von K_1 mit $1 < u < 4$,

Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in Q. R sei der Punkt $R(4 \mid 0)$.

Berechne den Inhalt A(u) des Dreiecks PQR.

Zeige dass der Inhalt für einen Wert u mit $1{,}8 < u < 1{,}9$ einen Extremwert annimmt.

Berechne u mit dem Newtonschen Iterationsverfahren.

(Für CAS-Lösung:) Berechne u.

Aufgabe 420 (Abitur BW 1975)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{für} \quad x \geq 0, \quad x \in R$$
$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{8-x}} \qquad \text{für} \quad x < 8, \quad x \in R$$

a) Untersuche das Schaubild K_g von g auf waagrechte Tangenten und auf Asymptoten und zeichne es im Bereich $-8 \leq x < 8$ mit Längeneinheit 1 cm.

Zeichne in dasselbe Achsenkreuz das Schaubild K_f von f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$.

Weise durch Rechnung nach, dass sich K_f und K_g berühren. Berechne die Koordinaten des Berührpunktes.

K_g, die Koordinatenachsen und die Gerade x = -8 schließen eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt.

b) Das Schaubild der Funktion g gehört zu einer Kurvenschar mit der Gleichung

$$y = \frac{a}{\sqrt{b-x}} \qquad (a, b \in R^+;\ x < b)$$

Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit jede Kurve der Schar das Schaubild von f berührt ? Gib die Koordinaten des Berührpunkts B in Abhängigkeit von a an.

c) Eine Kurve der Schar mit der Gleichung

$$y = \frac{a}{\sqrt{2a-x}} \qquad (a \in R^+;\ x < 2a)$$

das Schaubild K_f und die Gerade x = t (a < t < 2a) begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(t).

Dieselbe Fläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen V(t) des entstehenden Drehkörpers.

Untersuche das Verhalten von A(t) und V(t) für $t \to 2a$.

d) Gegeben ist die Funktion G durch

$$G(x) = \int_{-8}^{x} \frac{4}{\sqrt{8-t}}\,dt \qquad \text{mit} \quad -8 \leq x \leq 4.$$

Begründe, dass G streng monoton ist. Bestimme die Ableitung ihrer Umkehrfunktion.

Aufgabe 421

$$f(x)=\frac{4-x}{2\sqrt{x}}$$

Bestimme: Definitionsbereich, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung.

Aufgabe 422

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$$

Bestimme: Definitionsbereich, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnung.

Aufgabe 423 (BW 1991)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Bestimme die Symmetrie und die Asymptoten von K.

Untersuche K auf Wendepunkte.

Zeichne K für $-4 \le x \le 4$ mit Längeneinheit 1 cm.

b) Zeige: f hat für $x \in R$ eine Umkehrfunktion $\bar{f}$.

Bestimme den Funktionsterm $\bar{f}(x)$ und gib die Definitionsmenge von $\bar{f}$ an.

Zeichne das Schaubild $\bar{K}$ von $\bar{f}$ für $x \ge 0$ in das vorhandene Achsenkreuz ein.

K und $\bar{K}$ umschließen im 1. Feld ein Flächenstück.

Berechne seinen Inhalt.

c) Die Gerade $x = 3$, die x-Achse und die Kurve C mit der Gleichung

$$y = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \quad \text{für } -4 < x < 4$$

umschließen im 1. Feld ein Flächenstück. Dieses rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Drehkörper mit dem Volumen V.

Zeige zunächst: In der Gleichung $\frac{x^2}{16-x^2} = r + \frac{s}{4-x} + \frac{t}{4+x}$

Lassen sich die Konstanten r, s und t so bestimmen, daß diese Gleichung für alle x mit $-4 < x < 4$ gilt.

Berechne damit das Volumen V.

d) Eine Funktion h ist in einem Intervall $a \le x \le b$ stetig differenzierbar. In diesem Intervall gilt $h(x) \ge 0$, $h'(x > 0)$ und $h(a) = 9$.

Eine Funktion g ist gegeben durch $g(x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}}$ für $a \le x \le b$.

Das Schaubild von g schließt mit der x-Achse sowie mit den Geraden $x = a$ und $x = b$ eine Fläche mit dem Inhalt 4 ein.

Berechne h(b).

Erläutere, weshalb $h'(x) > 0$ für $a \le x \le b$ vorausgesetzt wurde.

Aufgabe 431

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$$

Bestimme: Definitionsbereich, Nullstelle, Extrempunkte, Asymptoten, Schaubild.

Aufgabe 432

$$f(x)=\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}$$

Bestimme: Definitionsbereich, Nullstelle, Extrempunkte, Asymptoten, senkrechte Tangente, Schaubild.

Aufgaben vom Typ 5
Zusammengesetzte Funktionen

Aufgabe 511 (Abitur BW 1974)

Gegeben sind die Funktionenscharen

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{tx}} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$g_t(x) = \sqrt{2 - tx} \quad \text{für} \quad x \leq \frac{2}{t}$$

mit $t \in \mathbb{R}^+$.

K_t sei das Schaubild von f_t und G_t das von g_t.

a) Zeige, daß sich die Schaubilder K_t und G_t berühren.

Zeichne beide für $t = \frac{1}{4}$ für $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ in ein gemeinsames Achsenkreuz mit LE 1 cm.

Zeige, daß der im ersten Feld liegende Abschnitt der gemeinsamen Tangente vom Berührpunkt in einem von t unabhängigen Verhältnis geteilt wird.

b) Für $t \in \mathbb{R}^+$ sei eine Funktion h_t gegeben durch

$$h_t = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{tx}} & \text{für } 0 < x < \dfrac{1}{t} \\[2ex] \sqrt{2 - tx} & \text{für } \dfrac{1}{t} \leq x \leq \dfrac{2}{t} \end{cases}$$

H_t sei das Schaubild von h_t.

Untersuche, ob die von H_t und den Koordinatenachsen begrenzte, ins Unendliche reichende Fläche einen endlichen Inhalt hat.

c) Zeige für $t \in \mathbb{R}^+$, daß H_t streng monoton fällt.

Berechne den Rauminhalt des Körpers, der bei Rotation der in b) beschriebenen Fläche um die y-Achse entsteht.

d) Zeige, daß durch jeden Punkt $P(x \mid y)$ mit $x > 0$ und $y > 0$ genau eine Kurve mit der Gleichung

$$y = \sqrt{t^2 - 2t - tx} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

geht.

Aufgabe 521 (Abitur BW 1974)

Gegeben sind die Funktionen f_t durch

$$f_t(x) = \frac{8}{t^2} \cdot \sqrt{|x^2 - tx|} \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+ .$$

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t.

a) Stelle f_t ohne Verwendung des Betragszeichens dar.

Untersuche f_t auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Ermittle Schnittpunkte mit der x-Achse und Extrempunkte von K_t.

Zeichne K_4 im Bereich $-4 \le x \le 8$ mit LE 1 cm.

b) Im Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ mit $x_1 > t$ wird die Tangente an K_t gelegt.
Berechne ihre Gleichung und die Abszisse x_S ihres Schnittpunktes mit der x-Achse in Abhängigkeit von x_1 und t.

Bestimme den Grenzwert der Tangentensteigung und den von x_S für $x_1 \to \infty$.

Stelle damit die Gleichung der einen Asymptote auf.
Trage diese in die Zeichnung der Teilaufgabe a) ein.

c) Berechne den Rauminhalt der Körper, die bei Rotation der Kurve K_t um die x-Achse für $0 \le x \le t$ und für $-t \le x \le 0$ entstehen.

Zeige, dass ihr Verhältnis von t unabhängig ist,